

Introducción al Álgebra (2014-01)

Control 4 Parte Problema 1

$$i) \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (3^j + 2^{k-j}) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \left[\binom{k}{j} 3^j + \binom{k}{j} 2^{k-j} \right]$$

(1.0) $\rightarrow = \sum_{k=0}^m \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 3^j + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 2^{k-j} \right]$ y como $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$ queda

(1.0) $\rightarrow = \sum_{k=0}^m \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 3^j + \sum_{j=0}^k \binom{k}{k-j} 2^{k-j} \right] = \sum_{k=0}^m \left[(3+1)^k + (2+1)^k \right]$

(1.0) $\rightarrow = \sum_{k=0}^m (4^k + 3^k) = \frac{1-4^{m+1}}{1-4} + \frac{1-3^{m+1}}{1-3} = \frac{4^{m+1}-1}{3} + \frac{3^{m+1}-1}{2}$

OBSERVACION: También $\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 2^{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 2^k \cdot \frac{1}{2^j} = 2^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j$
 $= 2^k \left(1 + \frac{1}{2}\right)^k = 2^k \left(\frac{3}{2}\right)^k = 3^k$ (Similar $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$)

ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x, \gamma \in \mathbb{R}^+ \quad f\left(\frac{x}{\gamma}\right) = f(x) - f(\gamma)$

Demstrar que $\sum_{i=1}^m f\left(1 + \frac{1}{i}\right) = f(m+1)$

En efecto, $\sum_{i=1}^m f\left(1 + \frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^m f\left(\frac{i+1}{i}\right) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\left[f\left(\frac{i+1}{i}\right) - f(i) \right]}_{\text{Propiedad Telescópica}} =$

(2.0) $\rightarrow = f(m+1) - f(1)$. Pero, usando la propiedad

para $x=\gamma$. $f\left(\frac{x}{\gamma}\right) = f(1) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

(1.0) \rightarrow Sigue que $\sum_{i=1}^m f\left(1 + \frac{1}{i}\right) = f(m+1)$

Punto Problema 2

i) A, B no vacíos, conjuntos cualesquiera.

$|A \times B| = |B \times A|$ si existe $f: A \times B \rightarrow B \times A$ biyectiva.

En efecto, sea $f: A \times B \rightarrow B \times A$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (y, x) \in B \times A$$

f inyectiva: Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$ tales que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

$$\Rightarrow (y_1, x_1) = (y_2, x_2) \Rightarrow y_1 = y_2 \wedge x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

f es sobreyectiva: Sea $(b, a) \in B \times A$, basta tomar $(a, b) \in (A \times B)$

con lo cual $f(a, b) = (b, a)$

Así f es biyectiva y por lo tanto $|A \times B| = |B \times A|$

ii) $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f(0) = 0 \wedge \exists d \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) = f(n) + d\}$

Por sus características, el conjunto \mathcal{F} se puede redefinir como $f(0) = 0 \Rightarrow$ Para $n=0$, $f(1) = f(0) + d \Rightarrow f(1) = d$

Segue que para $n=1$ $f(2) = f(1) + d = d + d = 2d \Rightarrow f(2) = 2d$.

Continuando así, $f(n) = nd$, es decir, \mathcal{F} es el conjunto $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \exists d \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nd\}$

Con esto, basta definir $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$

$d \longrightarrow \phi(d) = f_d \in \mathcal{F}$ con $f_d(n) = nd$

pues ϕ es inyectiva: $\phi(d_1) = \phi(d_2) \Rightarrow f_{d_1} = f_{d_2} \Rightarrow \forall n, nd_1 = nd_2 \Rightarrow d_1 = d_2$

ϕ es sobreyectiva: Pues $\forall f_d \in \mathcal{F}$ basta tomar $d \in \mathbb{N}$ y $\phi(d) = f_d$

Así, ϕ es biyectiva $\Rightarrow |\mathcal{F}| = |\mathbb{N}| \Rightarrow \mathcal{F}$ es numerable.